MatPro789 - Problema 3

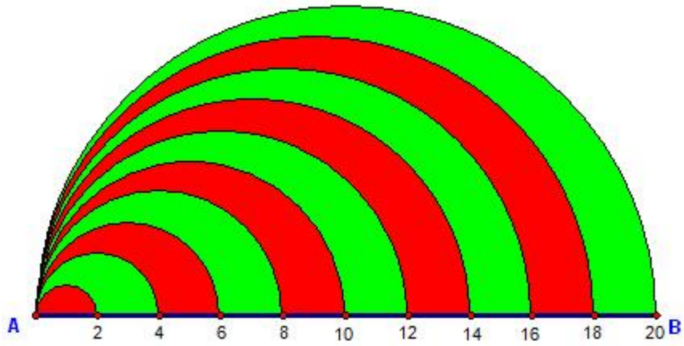
Resoluções de participantes

O MatPro reserva-se o direito de editar as resoluções de participantes publicadas, exclusivamente no sentido de retificar pormenores de linguagem ou de correção matemática, respeitando o processo de resolução apresentado.

Problema 3

Um projecto para a sala de convívio

O grupo do António está a fazer um projecto de educação visual para decorar uma das paredes da sala de convívio. O professor explicou que o projecto teria de ser baseado em arcos de circunferência e poderia ser colorido com duas cores à escolha dos alunos. O António e os colegas tiveram uma ideia. O desenho que eles fizeram começa com um segmento de recta AB, com **20 cm**, que é dividido em 10 partes iguais e cada arco é uma semicircunferência. A área entre dois arcos consecutivos é pintada alternadamente de vermelho e de verde.



Qual é o valor da diferença entre a área pintada de verde e a área pintada de vermelho?

Área do círculo: $A = \pi \times r^2$ Área do semicírculo: $A = \frac{\pi}{2} \times r^2$

Notas da equipa do MatPro

Todos os participantes fizeram o cálculo das áreas pela fórmula e obtiveram o resultado calculando diferenças entre áreas das regiões vermelhas e verdes. Outra resolução possível, com menos cálculos, seria pensar nas semelhanças. Todos os semicírculos são semelhantes. Consideramos que a área do semicírculo mais pequeno é 1 unidade de área (π cm^2 ou 1,57 cm^2). Neste caso, a razão de semelhança vai ser 1, 2, 3, 4, …, 10 e a razão entre as áreas dos semicírculos a respetiva razão ao quadrado: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. No entanto, para cada uma das regiões, tem de se fazer a diferença entre a área de um semicírculo e o do seguinte, menor que ele. Como a diferença entre dois quadrados perfeitos consecutivos é a sequência dos números ímpares, obtemos:

Área vermelha: 1+5+9+13+17=45 unidades de área

Área verde: 3+7+11+15+19=55 unidades de área

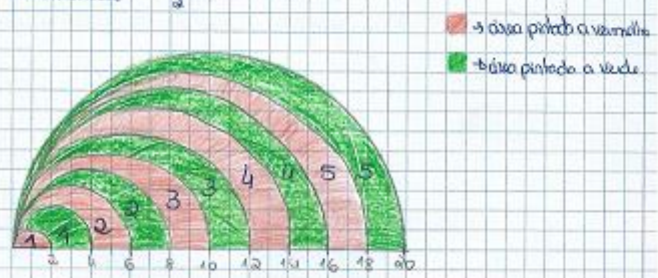
A diferença são 10 unidades de área, logo, 10π cm^2

Diogo Heleno, nº9, 7ºA

Mafalda Pires, nº19, 7ºA

• Começámos por aplicar a fórmula da área do semi-círculo.

$A_{\text{do semicírculo}} = \frac{\pi}{2} \times r^2$



$\text{Área}_{\text{vermelha }1} = \frac{\pi}{2} \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$

$A_{\text{verde }1} = \frac{\pi}{2} \times 2^2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times 4 - \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

$A_{\text{vermelha }2} = \frac{\pi}{2} \times 3^2 - \frac{4\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times 9 - \frac{4\pi}{2} = \frac{9\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

$A_{\text{verde }2} = \frac{\pi}{2} \times 4^2 - \frac{9\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times 16 - \frac{9\pi}{2} = \frac{16\pi}{2} - \frac{9\pi}{2} = \frac{7\pi}{2}$

$A_{\text{vermelha }3} = \frac{\pi}{2} \times 5^2 - \frac{16\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times 25 - \frac{16\pi}{2} = \frac{25\pi}{2} - \frac{16\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$

$A_{\text{verde }3} = \frac{\pi}{2} \times 6^2 - \frac{25\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times 36 - \frac{25\pi}{2} = \frac{36\pi}{2} - \frac{25\pi}{2} = \frac{11\pi}{2}$

$A_{\text{vermelho }4} = \frac{\pi}{2} \times 7^2 - \frac{36\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times 49 - \frac{36\pi}{2} = \frac{49\pi}{2} - \frac{36\pi}{2} = \frac{13\pi}{2}$

$A_{\text{verde }4} = \frac{\pi}{2} \times 8^2 - \frac{49\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times 64 - \frac{49\pi}{2} = \frac{64\pi}{2} - \frac{49\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$

$A_{\text{vermelha }5} = \frac{\pi}{2} \times 9^2 - \frac{64\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times 81 - \frac{64\pi}{2} = \frac{81\pi}{2} - \frac{64\pi}{2} = \frac{17\pi}{2}$

$A_{\text{verde }5} = \frac{\pi}{2} \times 10^2 - \frac{81\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \times 100 - \frac{81\pi}{2} = \frac{100\pi}{2} - \frac{81\pi}{2} = \frac{19\pi}{2}$

$\text{Área}_{\text{total vermelha}} = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} + \frac{9\pi}{2} + \frac{13\pi}{2} + \frac{17\pi}{2} = \frac{45\pi}{2}$

$\text{Área}_{\text{total verde}} = \frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{2} + \frac{11\pi}{2} + \frac{15\pi}{2} + \frac{19\pi}{2} = \frac{55\pi}{2}$

Diferença entre a área verde e vermelha $= A_{\text{total verde}} - A_{\text{total vermelha}} = \frac{55\pi}{2} - \frac{45\pi}{2} = \frac{10\pi}{2} = 5\pi$

• Após calcularmos a área de cada semi-círculo, quer vermelho, quer verde, retirámos o valor da área dos arcos de semi-círculo anterior, mais pequeno, de modo a obtermos o valor exato de cada arco.

R: O valor da diferença entre a área pintada de verde e a área pintada de vermelho é de 5π.

Diogo Heleno, nº9, 7ºA.
Mafalda Pires, nº19, 7ºA

Diogo Heleno, nº9, 7ºA

Mafalda Pires, nº19, 7ºA

$A_1 = \frac{??}{2} \times r^2 = 1,57 \times 100 = 157$

$A_2 = \frac{??}{2} \times r^2 = 1,57 \times 81 = 127,17$

$A_3 = \frac{??}{2} \times r^2 = 1,57 \times 64 = 100,48$

$A_4 = \frac{??}{2} \times r^2 = 1,57 \times 49 = 76,93$

$A_5 = \frac{??}{2} \times r^2 = 1,57 \times 36 = 56,52$

$A_6 = \frac{??}{2} \times r^2 = 1,57 \times 25 = 39,25$

$A_7 = \frac{??}{2} \times r^2 = 1,57 \times 16 = 25,12$

$A_8 = \frac{??}{2} \times r^2 = 1,57 \times 9 = 14,13$

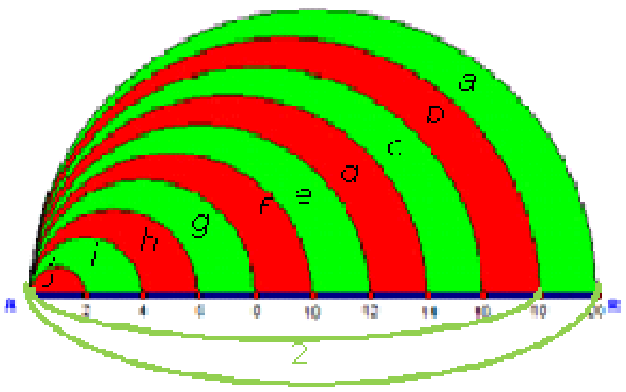
$A_9 = \frac{??}{2} \times r^2 = 1,57 \times 4 = 6,28$

$A_{10} = \frac{??}{2} \times r^2 = 1,57 \times 1 = 1,57$

$A_a = A_1 - A_2 = 157 - 127,17 = 29,83$
$A_b = A_2 - A_3 = 127,7 - 100,48 = 27,22$
$A_c = A_3 - A_4 = 100,48 - 76,93 = 23,549999... \tilde{} \; 23,55$
$A_d = A_4 - A_5 = 76,93 - 56,52 = 20,410000... \tilde{} \; 20,41$
$A_e = A_5 - A_6 = 56,52 - 39,25 = 17,270000... \tilde{} \; 17,27$
$A_f = A_6 - A_7 = 39,25 - 25,12 = 14,129999... \tilde{} \; 14,13$
$A_g = A_7 - A_8 = 25,12 - 14,13 = 10,99$
$A_h = A_8 - A_9 = 14,13 - 6,28 = 7,850000... \tilde{} \; 7,85$
$A_i = A_9 - A_{10} = 6,28 - 1,57 = 4,71$
$A_j = A_{10} = 1,57$

As áreas dos algarismos correspondem aos semicírculos em que o algarismo se encontra (ex.: A_1 corresponde a (ver imagem); A_2 corresponde a (ver imagem)).

As áreas das letras correspondem à área da pequena porção da imagem (ex.: (ver imagem)).



$A_{Verde} = 29,83 + 23,55 + 17,27 + 10,99 + 4,71 = 86,349999...(9...8) \tilde{} \; 86,35$

$A_{Vermelho} = 27,22 + 20,41 + 14,13 + 7,85 + 1,57 = 71,18$

$A_{Verde} - A_{Vermelho} = 86,35 - 71,18 = 15,17$

Beatriz Menino, 7ºB, Nº 5

Dados:
Segmento de reta AB mede 20 cm. Este está dividido em 10 partes iguais.
Área total do projeto:
d = 20 cm   r = 10 cm
$A = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 10^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 100}{2} = \frac{314}{2} = 157\ cm^2$
Área do 1.º semicírculo vermelho (1.ª área vermelha):
d = 2 cm   r = 1 cm
$A = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 1^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 1}{2} = \frac{3{,}14}{2} = 1{,}57\ cm^2$
Área do 2.º semicírculo (<u>verde</u> + vermelho):
d = 4 cm   r = 2 cm
$A = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 2^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 4}{2} = \frac{12{,}56}{2} = 6{,}28\ cm^2$
Área do 3.º semicírculo (<u>vermelho</u>+verde +vermelho):
d = 6 cm   r = 3 cm
$A = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 3^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 9}{2} = \frac{28{,}26}{2} = 14{,}13\ cm^2$
Área da 2.ª área vermelha:
$A_{3.º\ semicírculo} + A_{2.º\ semicírculo} =$
= 14, 13 – 6, 28 =
= 7,85 cm^2
Área do 4.º semicírculo (<u>verde</u>+vermelho+verde +vermelho):
d = 8 cm   r = 4 cm
$A = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 4^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 16}{2} = \frac{50{,}24}{2} = 25{,}12\ cm^2$
Área do 5.º semicírculo (<u>vermelho</u>+verde+vermelho+verde +vermelho):
d = 10 cm   r = 5 cm
$A = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 5^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 25}{2} = \frac{78{,}5}{2} = 39{,}25\ cm^2$
Área da 3.ª área vermelha:
$A_{5.º\ semicírculo} + A_{4.º\ semicírculo} =$
= 39, 25 – 25, 12 =
= 14, 13 cm^2
Área do 6.º semicírculo (<u>verde</u>+vermelho+verde+vermelho+verde +vermelho):
d = 12 cm   r = 6 cm
$A = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 6^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 36}{2} = \frac{113{,}04}{2} = 56,\ 52\ cm^2$
Área do 7.º semicírculo (<u>vermelho</u>+verde+vermelho+verde+vermelho+verde +vermelho):
d = 14 cm   r = 7 cm
$A = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 7^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 49}{2} = \frac{153{,}86}{2} = 76,\ 93\ cm^2$
Área da 4.ª área vermelha:
$A_{7.º\ semicírculo} + A_{6.º\ semicírculo} =$
= 76, 93 – 56, 52 =
= 20, 41 cm^2
Área do 8.º semicírculo (<u>verde</u>+vermelho+verde+vermelho+verde+vermelho+verde +vermelho):
d = 14 cm   r = 7 cm
$A = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 8^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 64}{2} = \frac{200{,}96}{2} = 100,\ 48\ cm^2$
Área do 9.º semicírculo (vermelho+verde+vermelho+verde+vermelho+verde+vermelho+verde +vermelho):
d = 14 cm   r = 7 cm
$A = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 9^2}{2} = \frac{3{,}14 \times 81}{2} = \frac{254{,}34}{2} = 127,\ 17\ cm^2$
Área da 5.ª área vermelha:
$A_{9.º\ semicírculo} + A_{8.º\ semicírculo} =$
= 127, 17 – 100, 48 =
= 26, 69 cm^2
$A_{todas\ as\ áreas\ vermelhas} =$
= 1,57 + 7, 85 + 14,13 + 20, 41 +26, 69 =
= 70, 65 cm^2
$A_{verde} = A_{total} - A_{vermelha} =$
= 157 – 70, 65 =
= 86, 35 cm^2

Diferença entre área verde e área vermelha:
$A_{verde} - A_{vermelha} =$
= 86, 35 – 70, 65 =
= 15, 7 cm^2

João Martin Fernandes, 8º F, Nº 11

			ÁREA SEMICÍRCULO		ÁREA - ÁREAS ANTERIORES	
PI	PI/2	RAIO	VERMELHO	VERDE	VERMELHO	VERDE
3,142	1,571	1	1,571		1,571	
		2		6,283		4,712
		3	14,137		7,854	
		4		25,133		10,996
		5	39,270		14,137	
		6		56,549		17,279
		7	76,969		20,420	
		8		100,531		23,562
		9	127,235		26,704	
		10		157,080		29,845
					70,686	86,394
				diferença	15,708 cm	

Calculei as áreas de cada semicírculo
Para cada área Vermelha e Verde subtraí as áreas anteriores

David Carreira, 7º B, Nº 11

$A_{círculo} = \pi \times r^2$

$A_{semicírculo} = \frac{\pi \times r^2}{2}$

Diâmetro = 20 cm
Raio = 10 cm

$A_{semicírculo} = \frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{3,14 \times 10^2}{2} = \frac{314}{2} = 157 \text{ cm}^2$

$157 : 10 = 15,7 \text{ cm}^2$

R.: O valor da diferença entre a área pintada de verde e a área pintada de vermelho é de 15,7 cm².